合成関数の極限 — limit of a composite function

青山耕治

2011 年 6 月 22 日 (第 1 版)

1　はじめに

高等学校の教科書, 例えば [1] に次のような計算が載っている。

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to 0}2\cdot\frac{\sin 2x}{2x}=2\cdot 1=2.$$

これをもう少し詳しく書いてみると

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to 0}2\cdot\frac{\sin 2x}{2x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=2\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=2\cdot 1=2$$

となるのだろう。ここで, $\lim_{y\to 0}\sin y/y=1$ と lim の性質 (定数 2 は外に出してよい) は既知とした。この計算は正しいのだが, $\lim_{x\to 0}$ が $\lim_{y\to 0}$ に変わるところを説明するのは案外厄介なのではないかと思い, その部分を書いてみることにした。

2　定理および系

C, D を $\mathbb{R}$ の空でない部分集合とし, 関数 $f\colon C\to\mathbb{R}$ と $g\colon D\to\mathbb{R}$ の合成関数 $g\circ f\colon C\to\mathbb{R}$ を考える。ただし, $f(C)\subset D$ が成り立っていると仮定する。

まず, 次の定理を示す。

定理 1. $\lim_{x\to a}f(x)=b$, $\lim_{y\to b}g(y)=c$ とする。ただし, $a, b, c\in\mathbb{R}$ である。さらに, ある $\delta>0$ が存在して

$$x\in C,\ x\neq a,\ |x-a|<\delta\Rightarrow f(x)\neq b$$

が成り立つとする。このとき, $\lim_{x\to a}g\circ f(x)=c$ である。

証明. $\epsilon>0$ を任意に固定する。$\lim_{y\to b}g(y)=c$ より, ϵ に対して

$$\exists\delta'>0: y\in D,\ y\neq b,\ |y-b|<\delta'\Rightarrow|g(y)-c|<\epsilon$$

が成り立つ。$\lim_{x\to a}f(x)=b$ より, δ' に対して

$$\exists\delta''>0: x\in C,\ x\neq a,\ |x-a|<\delta''\Rightarrow|f(x)-b|<\delta'$$

が成り立つ。したがって

$$x \in C,\, x \neq a,\, |x-a| < \min\{\delta, \delta''\} \Rightarrow f(x) \neq b,\, |f(x)-b| < \delta' \Rightarrow |g(f(x))-c| < \epsilon$$

である。よって, $\lim_{x \to a} g \circ f(x) = c$ である。 □

定理 1 より, 直ちに次の系を得る。

系 2. f は単射であり, $a \in C$ で連続とする。また, $b = f(a)$, $\lim_{y \to b} g(y) = c$ とする。ただし, $c \in \mathbb{R}$ である。このとき, $\lim_{x \to a} g \circ f(x) = c$ である。

証明. f は $a \in C$ で連続で, $b = f(a)$ だから

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) = b$$

が成り立つ。また, 単射であるから

$$x \in C,\, x \neq a \Rightarrow f(x) \neq f(a) = b$$

である。よって, 定理 1 より結論が得られた。 □

系 2 より, $f(x) = 2x$, $b = 2a$, $\lim_{y \to b} g(y) = c$ のとき

$$\lim_{x \to a} g(2x) = \lim_{x \to a} g \circ f(x) = \lim_{y \to 2a} g(y) = c$$

である。さらに, $f(x) = 2x$, $a = 0$, $g(y) = \sin y / y$ とすれば

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x} = \lim_{x \to 0} g \circ f(x) = \lim_{y \to 0} g(y) = \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$$

となる。

3 文献を見てみると

定理 1 みたいな議論が載っている教科書を探してみたところ, [2] に掲載されていることを確認した [2, 定理 24.6]。

自分が学生のとき, この本 [2] は大変敷居が高いと感じたが, 今読んでみると, いろんなことがしっかり書かれた便利な本であると感じるから不思議である。

参考文献

[1]「改訂版 数学 III」数件出版 (2010)。

[2] 小松勇作「解析概論 [I]」廣川書店 (1962)。